

## EXTRAPOLAÇÃO PARA FUSÃO DISTRIBUÍDA DE MEDIDAS ATRASADAS EM REDE DE SENSORES

RONAN A. J. CHAGAS, JACQUES WALDMANN

*Depto. de Sistemas e Controle, Divisão de Engenharia Eletrônica, Instituto Tecnológico de Aeronáutica  
12228-900 São José dos Campos, SP, Brasil*

*E-mails: ronan.jardim@gmail.com, jacques@ita.br*

**Abstract**— Two fusion methods are investigated for handling delayed measurements in a distributed sensor network. The first one is a Kalman filter-based optimal processing of delayed measurements that yields a significant computational effort. The second one has evolved from a previously known suboptimal extrapolation of delayed measurements for a single Kalman filter and adapted here for distributed estimation. The latter method yields a lower computational workload though at the expense of degraded estimation accuracy. Theoretical aspects of both fusion methods are confirmed by simulation.

**Keywords**— Distributed Sensor Networks, Sensor Fusion, Delayed Measurements, Measurement Extrapolation, Kalman Filtering, Stochastic Filtering.

**Resumo**— Duas técnicas são analisadas para a incorporação de medidas atrasadas em uma rede de sensores distribuídos. O primeiro método, chamado de abordagem clássica, se baseia na re-iteração do filtro de Kalman, fornecendo uma estimativa ótima com alto custo computacional. Já o segundo método foi desenvolvido com base na extrapolação de medidas, possui carga computacional menor e é sub-ótimo; portanto, fornece uma estimativa degradada. Simulações validam aspectos teóricos.

**Palavras-chave**— Redes de Sensores Distribuídos, Medidas Atrasadas, Extrapolação de Medidas, Filtragem de Kalman, Filtragem Estocástica.

### 1 Introdução

Uma rede com sensores distribuídos e seus respectivos nós de processamento local realizando medições de um sistema dinâmico, conforme representado na figura 1, pode alcançar, localmente, níveis mais acurados de estimação quando os nós trocam informações. Essa estimação distribuída traz também um novo nível de robustez, pois não fica sujeita a um ponto crítico de falha, como ocorre com estimação centralizada (Olfati-Saber, 2007; Cativelli *et al.*, 2008).

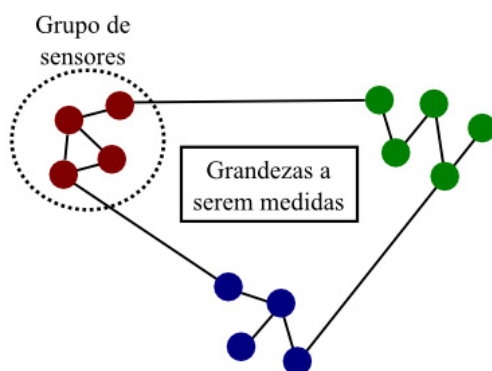


Figura 1. Rede de sensores distribuídos.

Cada nó possui um conjunto de sensores e uma unidade de processamento que itera um filtro de Kalman. Chagas e Waldmann (2009) investigaram a troca de informações entre os sensores da rede. Duas possibilidades foram avaliadas: a troca do vetor de medidas auferido pelos sensores em cada nó, e a do de estimativas do filtro de Kalman após a fusão local

das medidas. A troca de medidas entre os nós da rede mostrou-se mais vantajosa.

Prosseguindo aqui aquela investigação, os nós transmitem o vetor de medidas para os vizinhos a cada amostragem dos sensores. Por sua vez, esses vizinhos podem retransmitir as informações recebidas. Isto é chamado de consenso e permite que os dados de um nó sejam propagados para além de sua vizinhança. Feita essa comunicação, e assumindo conhecer as incertezas nos sensores distribuídos mediante suas respectivas matrizes de covariância do ruído de medição, os nós fundem as medidas e geram um novo vetor de medidas, fundidas, para a atualização do filtro de Kalman.

No caso ideal, esse problema já foi bastante abordado na literatura e a metodologia mencionada mostrou-se um algoritmo simples e eficaz para a sua solução (Chagas & Waldmann, 2009). No entanto, devido a atrasos durante o processo de troca de informações, é possível um nó receber uma medida atrasada, auferida em um instante de amostragem anterior. Se esta medida for incorporada sem nenhuma consideração adicional, pode haver degradação significativa da estimativa distribuída.

Aqui serão investigadas duas abordagens para a solução deste problema de estimação distribuída. A primeira, chamada de abordagem clássica, se refere à re-iteração do filtro de Kalman. Sua construção assegura a otimalidade na fusão das medidas atrasadas, mas possui carga computacional elevada. A segunda foi desenvolvida adaptando-se a abordagem de extrapolação de medidas para o caso local publicado por Larsen *et al.* (1998). Esta metodologia é sub-ótima, mas a carga computacional necessária para a execução do algoritmo é menor, podendo ser abordagem

atraente em determinadas aplicações com poder computacional limitado.

## 2 Formulação do Problema

Assume-se que os diversos nós realizam medições das mesmas grandezas, como, e.g., a posição de uma aeronave, a sua atitude, ou altitude. Um modelo linear rege o processo dinâmico associado às medições, conforme expresso em (1):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{u}_k \quad (1)$$

em que  $\mathbf{F}_k$  denota uma matriz  $M \times M$  que descreve a dinâmica do sistema e  $\mathbf{G}_k \mathbf{u}_k$  é ruído branco de dimensão  $M \times 1$  com covariância  $\mathbf{Q}_k$ . Esse modelo vale para cada  $i$ -ésimo nó na rede,  $i \in [1, 2, 3, \dots, q]$ , o qual possui um conjunto de sensores que realizam a medição dos estados no instante  $k$  segundo (2):

$$\mathbf{y}_k^i = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k^i \quad (2)$$

em que  $\mathbf{H}_k$  é uma matriz  $M \times N$  e  $\mathbf{v}_k$  é o ruído de medição branco de dimensão  $N \times 1$  com covariância  $\mathbf{R}_k^i$ . Adota-se que os processos de ruído de medição nos diferentes sensores não são correlacionados entre si. Adicionalmente, todos os nós possuem os mesmos sensores e, por isso, o mesmo  $\mathbf{H}_k$  por questões de simplificação.

Após o instante  $k$  de amostragem, considera-se que um determinado nó  $i$  recebe um conjunto de medidas dos nós vizinhos, denominado  $v_k^i$ . Esse conjunto poderá possuir medidas de instantes anteriores de amostragem e será considerado que cada nó possui um mecanismo que atribui estampas de tempo às medidas. Assim, o  $i$ -ésimo nó no instante  $k$  conhece o instante exato em que foi auferida uma medida em  $v_k^i$ . O problema se resume a encontrar metodologias para fundir as medidas em  $v_k^i$  que chegam no instante  $k$  ao nó  $i$ .

## 3 Considerações e Definições

### 3.1 Simbologia e conceito de vizinhança

$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i$  e  $\mathbf{P}_{k|k-1}^i$  são, respectivamente, a estimativa do vetor de estados, o erro de estimação e a sua covariância no nó  $i$  no instante  $k$ , dadas todas as informações obtidas até o instante  $k-1$ . A vizinhança do  $i$ -ésimo nó é o conjunto de todos os nós com que aquele se comunica diretamente.

### 3.2 Filtros de Kalman

O Filtro de Kalman Local (*LKF – Local Kalman Filter*) é o estimador recursivo iterado em cada um dos nós da rede quando única e exclusivamente medidas locais são usadas porque todos os enlaces de comunicação desse nó estão cortados. Este caso representa um extremo e deve ser considerado como um limite inferior da qualidade de estimativa que se pode alcançar na rede distribuída.

O Filtro de Kalman Global (*GKF – Global Kalman Filter*), idealmente, seria obtido caso existisse um nó central interligado a todos os nós e respectivos conjuntos de sensores na rede. Muito embora seja inviável na rede de sensores, é utilizado como *benchmark*, pois não é possível obter qualidade de estimativa superior a esta.

O Filtro de Kalman Distribuído (*DKF – Distributed Kalman Filter*) é o que ocorre durante a operação usual da rede, quando cada nó possui como informação as medidas dos seus sensores locais e as de seus vizinhos para atualizar seu filtro.

## 4 Definição de Atraso de Medida

Primeiramente, define-se o que será considerado uma medida atrasada. Os sistemas considerados são discretizados e possuem uma dada taxa de amostragem. Assim, é coerente definir que um atraso não-negligenciável ocorre quando a medida recebida tiver sido auferida com um atraso maior que um período de amostragem. Caso contrário, chamar-se-á o atraso de negligenciável e a fusão de medidas poderá ser feita como no caso ideal, conforme visto em Chagas e Waldmann (2009).

Assim, toda medida recebida possuirá um atraso  $\Delta_n$  que será um múltiplo do período de amostragem. O conjunto  $v_k^i$  em subconjuntos  $v_{k,\Delta_n}^i$  é particionado, cada um com todas as medidas recebidas pelo nó  $i$  com um atraso de  $\Delta_n$  períodos de amostragem. Para cada subconjunto, um novo vetor de medidas atrasadas fundidas é criado como em (3):

$$\mathbf{y}_{f,k-\Delta_n}^i = \Theta_{k,\Delta_n}^i \cdot \left( \sum_{j \in v_{k,\Delta_n}^i} (\mathbf{R}_{k-\Delta_n}^j)^{-1} \mathbf{y}_{k-\Delta_n}^j \right) \quad (3)$$

$$(\mathbf{R}_{f,k-\Delta_n}^i)^{-1} = (\Theta_{k,\Delta_n}^i)^{-1} = \sum_{j \in v_{k,\Delta_n}^i} (\mathbf{R}_{k-\Delta_n}^j)^{-1}$$

sendo  $\Delta_0 = 0 < \Delta_1 < \dots < \Delta_{\max}$ . Deve ser definido um atraso máximo que poderá ser fundido. Isso é necessário porque, conforme será visto posteriormente, os métodos aqui estudados demandam o armazenamento de informações e a quantidade de memória disponível para tal é finita. Finalmente, o problema se reduz

a fundir no instante  $k$  os novos vetores de medidas  $\mathbf{y}_{f,k-\Delta_n}^i$ ,  $0 \leq n \leq \max$ .

## 5 Abordagem Clássica – Re-iteração do Filtro de Kalman

A abordagem clássica consiste na re-iteração do filtro de Kalman para incorporar medidas atrasadas. Consiste em voltar o algoritmo do filtro ao instante em que a medida atrasada deveria ter sido incorporada (momento em que ela foi auferida) e recalculá-la cada iteração até que se chegue ao instante presente. Esse método assegura a otimalidade da estimativa, mas é claro que a carga computacional se torna alta à medida que aumenta o atraso na medida.

Neste método, o nó precisa armazenar os vetores de medição com respectivas estatísticas e os estados estimados com suas covariâncias preditas, desde o instante de amostragem em que a medida atrasada foi auferida até o instante atual. Conforme mencionado, um atraso máximo admissível deve ser definido. Se uma medida mais atrasada que este limiar for recebida pelo nó, então ela será descartada.

Sejam  $\mathbf{y}_{u,k-\Delta_n}^i$  e  $\mathbf{R}_{u,k-\Delta_n}^i$  o vetor de medidas e sua estatística, os quais foram utilizados para a atualização do filtro no instante  $k - \Delta_n$ . Então, para cada subconjunto  $\mathcal{V}_{k,\Delta_n}^i$ , que são ordenados de forma decrescente com respeito ao atraso, deve ser feito:

- Crie um novo vetor de medidas e matriz de covariância conforme (4).
- Com  $\mathbf{P}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1}^i$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1}^i$ , o novo vetor fundido e suas estatísticas obtidas, aplique a atualização do filtro de Kalman e sobrescreva  $\mathbf{P}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n}^i$  e  $\hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n}^i$ .
- Atualize  $\mathbf{y}_{u,k-\Delta_n}^i$  e  $\mathbf{R}_{u,k-\Delta_n}^i$  com os novos valores recém-computados.
- Continue a iteração do filtro (propagação e atualização com os valores utilizados) até o instante  $k - \Delta_{n-1}$  e repita este algoritmo utilizando os dados atrasados pertinentes a esse novo instante.

$$\mathbf{y}_{d,k-\Delta_n}^i = \left( \left( \mathbf{R}_{u,k-\Delta_n}^i \right)^{-1} + \left( \mathbf{R}_{f,k-\Delta_n}^i \right)^{-1} \right)^{-1} \cdot \left( \left( \mathbf{R}_{u,k-\Delta_n}^i \right)^{-1} \cdot \mathbf{y}_{u,k-\Delta_n}^i + \left( \mathbf{R}_{f,k-\Delta_n}^i \right)^{-1} \cdot \mathbf{y}_{f,k-\Delta_n}^i \right) \quad (4)$$

$$\mathbf{R}_{d,k-\Delta_n}^i = \left( \left( \mathbf{R}_{u,k-\Delta_n}^i \right)^{-1} + \left( \mathbf{R}_{f,k-\Delta_n}^i \right)^{-1} \right)^{-1}$$

Ao término deste algoritmo, o filtro *DKF* do nó  $i$  possuirá a mesma estimativa que aquela produzida se todas as medidas atrasadas, até o limite  $\Delta_{\max}$ , tives-

sem sido incorporadas nos momentos em que foram auferidas, assegurando otimalidade.

## 6 Uma Abordagem Baseada na Extrapolação de Medidas

Partindo do método de extrapolação de medidas em Larsen *et al.* (1998), será desenvolvida uma nova metodologia para incorporar medidas atrasadas em sistemas distribuídos. Essa nova abordagem não necessitará da iteração de um algoritmo recursivo, conforme o método clássico, e trará carga computacional tanto menor quanto mais atrasadas forem as medidas incorporadas.

Primeiramente, são extrapolados linearmente no  $i$ -ésimo nó todos os vetores de medida atrasados até o instante atual. Isto pode ser feito de acordo com (5) para cada subconjunto de  $\mathcal{V}_k^i$ :

$$\mathbf{y}_{f,k-\Delta_n}^{i,EXT} = \mathbf{y}_{f,k-\Delta_n}^i + \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i - \mathbf{H}_{k-\Delta_n} \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1}^i \quad (5)$$

$$\mathbf{y}_{f,k-\Delta_n}^{i,EXT} = \mathbf{H}_{k-\Delta_n} \mathbf{x}_{k-\Delta_n} + \mathbf{v}_{f,k-\Delta_n}^i + \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i - \mathbf{H}_{k-\Delta_n} \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1}^i$$

Extrapoladas todas as medidas para o instante  $k$ , elas são fundidas de acordo com (6) em um novo vetor que será incorporado ao filtro de Kalman.

$$\mathbf{y}_{u,k}^i = \kappa_k^i \cdot \left( \sum_{j=0}^{\max} \pi_{k,j}^i \cdot \mathbf{y}_{f,k-\Delta_j}^{i,EXT} \right) \quad (6)$$

$$\kappa_k^{i-1} = \sum_{j=0}^{\max} \pi_{k,j}^i$$

Os pesos escalares  $\pi_{k,j}^i$  serão definidos posteriormente. No entanto, já se pode mencionar que, se não existir nenhuma medida atrasada de uma determinada quantidade  $\Delta_n$  para o instante atual  $k$ , o peso correspondente  $\pi_{k,n}^i$  deverá ser 0. A formulação da estimativa LMMSE (*Linear Minimum Mean Square Error*) produz (7) (Bar-Shalom, *et al.*, 2001):

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i = E\{\mathbf{x}_k^i | \Omega_{k-1}^i, \mathbf{y}_{u,k}^i\} = E\{\mathbf{x}_k^i | \Omega_{k-1}^i\} + \mathbf{C}_{k,xy}^i \mathbf{C}_{k,yy}^{i-1} (\mathbf{y}_{u,k}^i - E\{\mathbf{y}_{u,k}^i | \Omega_{k-1}^i\})$$

$$\mathbf{C}_{k,xy}^i = E\{(\mathbf{x}_k^i - E\{\mathbf{x}_k^i\}) \cdot (\mathbf{y}_{u,k}^i - E\{\mathbf{y}_{u,k}^i\})^T | \Omega_{k-1}^i\} \quad (7)$$

$$\mathbf{C}_{k,yy}^i = E\{(\mathbf{y}_{u,k}^i - E\{\mathbf{y}_{u,k}^i\}) \cdot (\mathbf{y}_{u,k}^i - E\{\mathbf{y}_{u,k}^i\})^T | \Omega_{k-1}^i\}$$

sendo  $\Omega_{k-1}^i$  o conjunto de todas as medidas fundidas até o instante  $k-1$  no nó  $i$ . Utilizando (5), (6), (7) e o fato da estimativa LMMSE não ser enviesada (*unbia-*

sed), pode-se mostrar (8), a prova encontra-se no apêndice:

$$E\{\mathbf{y}_{u,k}^i | \boldsymbol{\Omega}_{k-1}^i\} = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i \quad (8)$$

Com este resultado, pode-se calcular a covariância cruzada  $\mathbf{C}_{k,xy}^i$  conforme expresso em (9):

$$\mathbf{C}_{k,xy}^i = \left( \sum_{j=0}^{\max} [\mathbf{M}_k^i(0; j) \mathbf{H}_{k-\Delta_j}^T \boldsymbol{\pi}_{k,j}^{i,T}] \boldsymbol{\kappa}_k^{i,T} \right) \quad (9)$$

sendo  $\mathbf{M}_k^i(n; j) = E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1}^i \tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_j|k-\Delta_j-1}^{i,T} | \boldsymbol{\Omega}_{k-1}^i\}$

Já a auto-covariância  $\mathbf{C}_{k,yy}^i$  é calculada a partir de (10):

$$\mathbf{C}_{k,yy}^i = \boldsymbol{\kappa}_k^i \cdot E \left\{ \sum_{j=0}^{\max} \boldsymbol{\pi}_{k,j}^i (\mathbf{H}_{k-\Delta_j} \tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_j|k-\Delta_j-1}^i + \mathbf{v}_{f,k-\Delta_j}^i) \right\} \cdot \left[ \sum_{j=0}^{\max} \boldsymbol{\pi}_{k,j}^i (\mathbf{H}_{k-\Delta_j} \tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_j|k-\Delta_j-1}^i + \mathbf{v}_{f,k-\Delta_j}^i) \right]^T | \boldsymbol{\Omega}_{k-1}^i \boldsymbol{\kappa}_k^{i,T} \quad (10)$$

que pode ser escrito em forma matricial como (11):

$$\mathbf{C}_{k,yy}^i = \boldsymbol{\kappa}_k^i \cdot \boldsymbol{\Pi}_k^i \cdot \boldsymbol{\Psi}_k^i \cdot \boldsymbol{\Pi}_k^{i,T} \cdot \boldsymbol{\kappa}_k^{i,T} \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\Pi}_k^i = \left[ \boldsymbol{\pi}_{k,0}^i \mathbf{I}_{N \times N} \quad \boldsymbol{\pi}_{k,1}^i \mathbf{I}_{N \times N} \quad \dots \quad \boldsymbol{\pi}_{k,\max}^i \mathbf{I}_{N \times N} \right]$$

em que a lei de formação da matriz quadrada  $\boldsymbol{\Psi}_k^i$  de dimensões  $\max X \max$  é dada por (12).

Elemento (n,n) na diagonal de  $\boldsymbol{\Psi}_k^i$ :

$$\mathbf{H}_{k-\Delta_n} \mathbf{M}_k^i(n; n) \mathbf{H}_{k-\Delta_n}^T + \mathbf{R}_{f,k-\Delta_n}^i \quad (12)$$

Elemento (n,m) fora da diagonal de  $\boldsymbol{\Psi}_k^i$ :

$$\mathbf{H}_{k-\Delta_n} \mathbf{M}_k^i(n; m) \mathbf{H}_{k-\Delta_m}^T$$

Para o cálculo de  $\mathbf{M}_k^i$ , da formulação do filtro de Kalman, obtém-se a relação (13).

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k-a|k-a-1}^i = \mathbf{F}_{k-a-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k-a-1}^i \mathbf{H}_{k-a-1}) \tilde{\mathbf{x}}_{k-a-1|k-a-2}^i + \mathbf{G}_{k-a-1} \mathbf{u}_{k-a-1} + \mathbf{F}_{k-a-1} \mathbf{K}_{k-a-1}^i \mathbf{v}_{k-a-1}^{i,f} \quad (13)$$

onde  $\mathbf{v}_{k-a-1}^{i,f}$  é o ruído do vetor de medição fundido no instante  $k-a-1$  pelo  $i$ -ésimo nó.

Repetindo este processo e utilizando o fato que  $\tilde{\mathbf{x}}_{k-b|k-b-1}^i$  é decorrelacionado da seqüência de ruídos de modelo e medição posterior ao instante  $k-b-1$ ,  $\mathbf{M}_k^i$  é dada por (14).

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_k^i(a; b) &= E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-a|k-a-1}^i \tilde{\mathbf{x}}_{k-b|k-b-1}^{i,T} | \boldsymbol{\Omega}_{k-1}^i\} = \\ &= \left[ \prod_{j=0}^{b-a-1} \mathbf{F}_{k-a-1-j} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k-a-1-j}^i \mathbf{H}_{k-a-1-j}) \right] \cdot \\ &\quad \cdot E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-b|k-b-1}^i \tilde{\mathbf{x}}_{k-b|k-b-1}^{i,T} | \boldsymbol{\Omega}_{k-1}^i\} \\ &\quad \forall a, b \in \mathbb{N}, a \leq k, b \leq k, b > a \end{aligned} \quad (14)$$

Observe que, para o cálculo da esperança  $E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-b|k-b-1}^i \tilde{\mathbf{x}}_{k-b|k-b-1}^{i,T} | \boldsymbol{\Omega}_{k-1}^i\} = \mathbf{P}_{k-b|k-b-1}^i$ , será necessário empregar um algoritmo recursivo. Zhang *et al.* (2005) mostraram um método para o cálculo dessa esperança. A carga computacional é comparável à da abordagem clássica. Assim, utiliza-se a aproximação em (15), que, embora proporcione uma estimativa menos acurada, reduzirá o esforço computacional.

$$\begin{aligned} E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-b|k-b-1}^i \tilde{\mathbf{x}}_{k-b|k-b-1}^{i,T} | \boldsymbol{\Omega}_{k-1}^i\} &\approx \\ &\approx E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-b|k-b-1}^i \tilde{\mathbf{x}}_{k-b|k-b-1}^{i,T} | \boldsymbol{\Omega}_{k-b-1}^i\} = \mathbf{P}_{k-b|k-b-1}^i \end{aligned} \quad (15)$$

A lei de formação, portanto, é como em (16).

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_k^i(n; m) &= \left[ \prod_{j=0}^{\Delta_m - \Delta_n - 1} \mathbf{F}_{k-\Delta_n-1-j} (\mathbf{I} - \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{K}_{k-\Delta_n-1-j}^i \mathbf{H}_{k-\Delta_n-1-j}) \right] \mathbf{P}_{k-\Delta_m|k-\Delta_m-1}^i \rightarrow m > n \quad (16) \\ \mathbf{M}_k^i(n; m) &= \mathbf{M}_k^i(m; n)^T \rightarrow m < n \\ \mathbf{M}_k^i(n; m) &= \mathbf{P}_{k-\Delta_m|k-\Delta_m-1}^i \rightarrow m = n \end{aligned}$$

onde  $m, n \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq m, n \leq \max$ . Então, o ganho de Kalman no instante  $k$  para o nó  $i$  pode ser escrito conforme (17). Notar que a multiplicação de matrizes  $\boldsymbol{\Pi}_k^i \cdot \boldsymbol{\Psi}_k^i \cdot \boldsymbol{\Pi}_k^{i,T}$  é na verdade um somatório com  $\max^2$  termos, escrito de forma a simplificar a notação. A informação nessa forma é útil para construir um algoritmo computacionalmente menos intenso que a multiplicação usual de matrizes genéricas.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k^i &= \mathbf{C}_{k,xy}^i \mathbf{C}_{k,yy}^{i,-1} = \\ &= \left( \sum_{j=0}^{\max} [\mathbf{M}_k^i(0; j) \mathbf{H}_{k-\Delta_j}^T \boldsymbol{\pi}_{k,j}^{i,T}] \cdot (\boldsymbol{\kappa}_k^i \boldsymbol{\Pi}_k^i \boldsymbol{\Psi}_k^i \boldsymbol{\Pi}_k^{i,T})^{-1} \right) \quad (17) \end{aligned}$$

Finalmente, devem ser definidos os pesos  $\boldsymbol{\pi}_{k,j}^i$  para a fusão. A aproximação realizada em (15) torna a metodologia menos acurada à medida que o atraso for aumentado. Assim, atribui-se mais peso às medidas menos atrasadas do que às medidas mais antigas. Sabe-se que o traço da matriz de covariância cruzada do erro de estimação entre o instante atual e o em que a medida foi auferida é dado por (18), onde  $tr(\cdot)$  significa o traço da matriz.

$$tr(E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i \tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_j|k-\Delta_j-1}^{i.T}\}) = tr(\mathbf{M}_k^i(0; j)) \quad (18)$$

Então, se esse valor for elevado, o estado no instante  $k - \Delta_j$  possui correlação alta com o estado atual. Logo, o vetor de medidas auferido naquele instante recebe um peso elevado. Caso contrário, existe pouca informação sobre o estado atual na medida auferida em  $k - \Delta_j$ ; logo, o seu peso é pequeno. Aconselha-se, pois, que os pesos sejam definidos por (19).

$$\pi_{k,j}^i = tr(\mathbf{M}_k^i(0; j)) \quad (19)$$

Com isso, pode-se resumir o algoritmo para o instante  $k$  no nó  $i$  da seguinte forma:

- Executar a previsão do filtro de Kalman para obter  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i$  e  $\mathbf{P}_{k|k-1}^i$ .
- Fundir os vetores atrasados conforme (3).
- Extrapolar os vetores atrasados fundidos conforme (5) e fundí-los conforme (6).
- Calcular as matrizes  $\mathbf{\Pi}_k^i$  e  $\mathbf{\Psi}_k^i$ .
- Executar a atualização do filtro de Kalman utilizando o ganho em (17).

### 7 Simulações e Resultados

Para a comparação entre as abordagens apresentadas, optou-se por utilizar o mesmo sistema simulado em Chagas e Waldmann (2009) e mostrado em (20).

$$\begin{cases} \mathbf{F}_k = \mathbf{F} = 1,01 \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ \mathbf{H}_k = \mathbf{H} = \mathbf{Q}_k = \mathbf{Q} = \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{R}_{k,i} = \mathbf{R}_i = \sigma_i \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ u_k = u = 0 \end{cases} \quad (20)$$

sendo  $\theta = 4,8759^\circ$ .  $\sigma_i$ , o número  $q$  de nós e a topologia da rede foram escolhidos como em Chagas e Waldmann (2009) e mostrados na figura 2. O valor inicial da covariância em todos os filtros foi definido como  $1000 \cdot \mathbf{I}_{2 \times 2}$ . A estimação inicial do vetor de estados em todos os filtros é  $\hat{\mathbf{x}}_{00} = [0 \ 0]^T$ , enquanto que o estado inicial verdadeiro é gerado com um vetor com duas variáveis aleatórias gaussianas  $N(0;1)$ . Uma realização está na figura 3.

Para a caracterização da qualidade da estimativa da rede, utilizou-se como figura de mérito o erro médio quadrático da rede obtido por simulação de Monte Carlo, dado por (21). Para cada instante  $k$ , a posição verdadeira do veículo é comparada com a estimativa atualizada de cada  $i$ -ésimo nó. O valor esperado

da rede na  $j$ -ésima realização  $E_{i,j}\{\cdot\}$  é estimado pela média sobre os  $i=1,2,\dots,q$  nós da rede. Então, o erro médio quadrático da rede é estimado pela média aritmética dessas estimativas sobre todas as  $j=1,2,\dots,N$  realizações efetuadas, sendo  $N$  um número suficientemente grande. Para os resultados apresentados posteriormente,  $N$  foi escolhido como 1000 e converteu-se essa figura de mérito para a escala decibel.

$$MSE(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N E_{i,j} \|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i\|^2 \quad (21)$$

Efetuar-se as simulações em quatro cenários. O primeiro é idêntico àquele em Chagas e Waldmann (2009), com três passos de consenso e nenhuma medida atrasada. É possível a cada nó obter todas as medidas da rede a cada instante de amostragem, o que torna a qualidade da estimativa DKF idêntica àquela do GKF. O resultado está na figura 4.

Nos cenários seguintes, foram adicionados atrasos à rede de sensores da seguinte forma: todo vizinho do  $i$ -ésimo nó  $i$  envia medidas atrasadas por um instante de amostragem e, adicionalmente, todo vizinho de um vizinho do  $i$ -ésimo nó  $i$  envia medidas atrasadas por dois instantes de amostragem, *sem poder ocorrer duplicação de medidas*. Devido à topologia da rede, um nó poderia receber uma medida atrasada que já tivesse sido incorporada em um instante anterior. A utilização desta medida em duplicação não é correta e pode degradar a qualidade da estimativa distribuída. Logo, o nó deverá possuir algum tipo de mecanismo que identifique a duplicação. Dessa forma, a cada instante, qualquer nó da rede terá a sua própria medida sem atraso e um conjunto de medidas atrasadas por um ou dois instantes de amostragem. Tais cenários com medidas atrasadas buscam avaliar o ganho na qualidade da estimativa distribuída da rede, em situações mais realistas nas quais medidas atrasadas demandam fusão adequada, em relação ao filtro local.

No segundo cenário, as medidas atrasadas foram incorporadas sem qualquer consideração, segundo a abordagem usual presente em Chagas e Waldmann (2009), e o resultado está na figura 5. No terceiro cenário, apenas medidas com um instante de amostragem de atraso foram fundidas e, no quarto, todas as medidas disponíveis foram incorporadas ao filtro. Nos dois últimos casos, as duas metodologias, a clássica e a aqui proposta, foram implementadas. Os resultados estão nas figuras 6 e 7 e a tabela 1 apresenta o tempo médio para a execução de uma simulação em cada metodologia, demonstrando o ganho computacional atingido com o novo algoritmo.

Tabela 1. Tempos de execução médios dos algoritmos.

Cenário	Abord. Clássica (s)	Extrap. Medidas (s)	Ganho Computacional
3	0,9387	0,6843	27,1%
4	1,4573	0,9092	37,6%

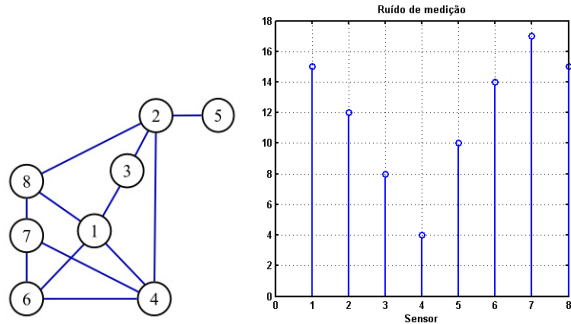


Figura 2. Topologia da rede e desvio-padrão do ruído de medição.

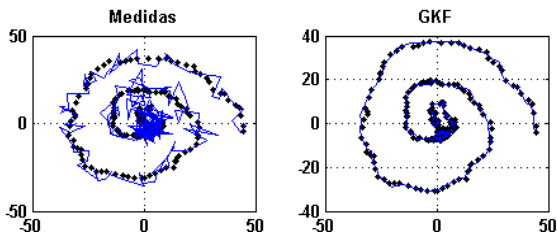


Figura 3. Uma realização do sistema proposto.

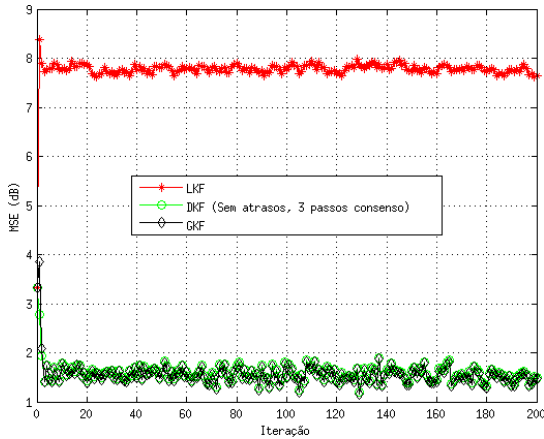


Figura 4. MSE no cenário 1 – Rede sem atrasos de medidas e com três passos de consenso (Chagas & Waldmann, 2009).

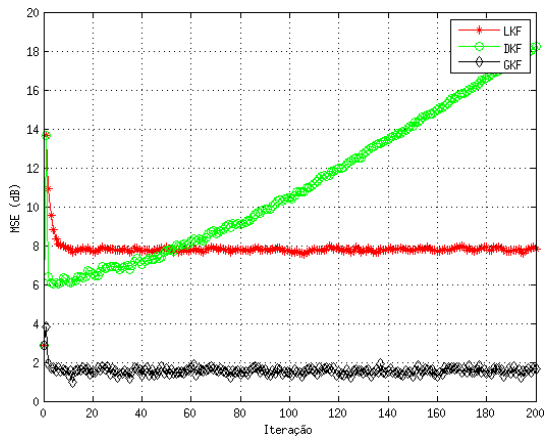


Figura 5. MSE no cenário 2 – Medidas atrasadas incorporadas desconsiderando o atraso.

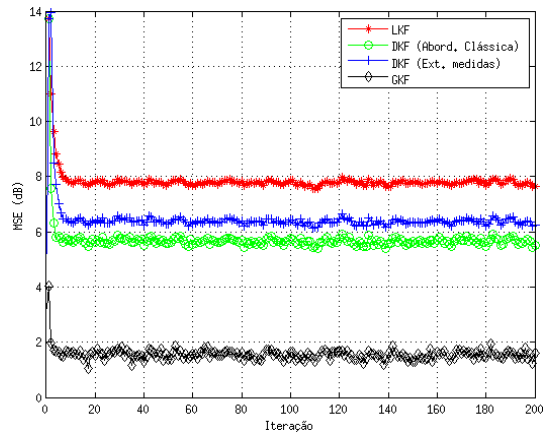


Figura 6. MSE no cenário 3 – Apenas medidas com atraso de um instante de amostragem foram incorporadas.

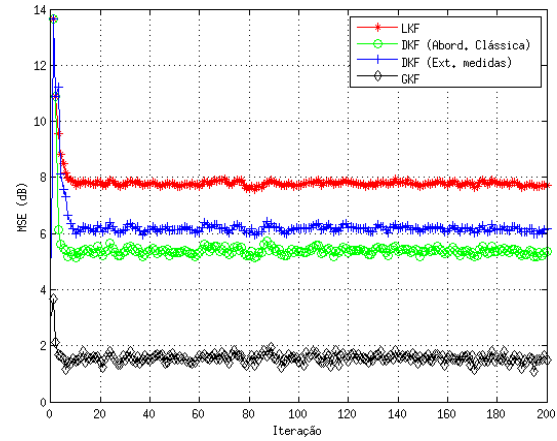


Figura 7. MSE no cenário 4 – Todas as medidas disponíveis foram incorporadas.

## 8 Conclusões

Foram investigadas duas abordagens para a incorporação de medidas atrasadas nos nós de uma rede para estimação distribuída. A primeira é ótima, mas computacionalmente custosa, e a segunda, sub-ótima com carga computacional menor. A desconsideração do atraso causa divergência da estimativa da rede. O sistema apresentado possui uma dinâmica bastante rápida e a correlação entre dois estados distantes no tempo é baixa. Fundir descuidadamente medidas atrasadas de vizinhos piora o desempenho da rede em relação a ignorar os nós vizinhos, como ocorre na filtragem local.

Ambas as metodologias de fusão de medidas proporcionaram ganho em relação à estimativa LKF. Esse ganho pode ser maior se a dinâmica do sistema for mais lenta, e medidas e estados distantes entre si no tempo apresentarem correlação mais alta. A rápida dinâmica do sistema utilizado no exemplo limita o ganho de incorporar, ainda que adequadamente, medidas sabidamente atrasadas (cenários 3 e 4), mesmo que com pequeno atraso. Quanto maior for o atraso

na medida, mesmo após sua devida extrapolação ao instante atual, menor influência aquela medida terá na qualidade da estimativa atual da rede. Isso pode ser observado verificando o ganho de desempenho entre a estimativa LKF e DKF nesses cenários. Claramente, não houve ganho significativo na acurácia quando medidas atrasadas de dois instantes de amostragem foram fundidas nos filtros.

O método clássico, mais acurado, apresenta carga computacional maior como esperado. No terceiro cenário, a segunda abordagem utilizou cerca de 73% do tempo da abordagem clássica e, no quarto cenário, 62% do tempo. A redução na carga computacional se acentuou conforme aumentou o atraso máximo admissível na fusão. Finalmente, a metodologia baseada na extrapolação de medidas é válida para a fusão de medidas atrasadas em rede para estimação distribuída. Embora não forneça uma estimativa ótima, possui carga computacional bem menor do que a abordagem clássica. Logo, é alternativa atraente quando a capacidade computacional nos nós for limitada.

### Agradecimentos

Este trabalho foi apoiado pelo projeto FINEP/CTA/INPE SIA (Sistemas Inerciais para Aplicação Aeroespacial) 11382\*2.

### Apêndice

A seguir, é demonstrado o resultado presente em (8). Utilizando (5) e (6), obtém-se (22).

$$\begin{aligned}
 E\{\mathbf{y}_{u,k}^i | \mathbf{\Omega}_{k-1}^i\} &= \\
 &= E\left\{ \mathbf{\kappa}_k^i \cdot \left( \sum_{j=0}^{\max} \pi_{k,j}^i \cdot \mathbf{y}_{f,k-\Delta_j}^{i,EXT} \right) \middle| \mathbf{\Omega}_{k-1}^i \right\} \\
 &= E\left\{ \mathbf{\kappa}_k^i \cdot \left( \sum_{j=0}^{\max} \pi_{k,j}^i \cdot (\mathbf{H}_{k-\Delta_j} \mathbf{x}_{k-\Delta_j} + \mathbf{v}_{f,k-\Delta_j}^i + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i - \mathbf{H}_{k-\Delta_j} \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_j|k-\Delta_j-1}^i) \right) \middle| \mathbf{\Omega}_{k-1}^i \right\}
 \end{aligned} \tag{22}$$

Rearranjando os termos e utilizando as propriedades do operador  $E\{\cdot\}$ , obtém-se (23).

$$\begin{aligned}
 E\{\mathbf{y}_{u,k}^i | \mathbf{\Omega}_{k-1}^i\} &= \\
 &= \mathbf{\kappa}_k^i \cdot \left( \sum_{j=0}^{\max} \pi_{k,j}^i \cdot (\mathbf{H}_{k-\Delta_j} E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_j}^i | \mathbf{\Omega}_{k-1}^i\} + \right. \\
 &\quad \left. + E\{\mathbf{v}_{f,k-\Delta_j}^i | \mathbf{\Omega}_{k-1}^i\} + \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i) \right)
 \end{aligned} \tag{23}$$

Como a estimativa LMMSE não é enviesada, então  $E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_j}^i | \mathbf{\Omega}_{k-1}^i\} = 0$ ,  $\forall j \in [0,1,\dots,\max]$ . Além

disso, por definição, os ruídos de todos os sensores possuem média zero. Com isso, é fácil verificar que  $E\{\mathbf{v}_{f,k-\Delta_j}^i | \mathbf{\Omega}_{k-1}^i\} = 0$ ,  $\forall j \in [0,1,\dots,\max]$  devido ao modo como os vetores de medição foram fundidos. Utilizando esses resultados, obtém-se (24) e a relação está demonstrada.

$$\begin{aligned}
 E\{\mathbf{y}_{u,k}^i | \mathbf{\Omega}_{k-1}^i\} &= \mathbf{\kappa}_k^i \cdot \left( \sum_{j=0}^{\max} \pi_{k,j}^i \cdot (\mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i) \right) \\
 &= \mathbf{\kappa}_k^i \cdot \left( \sum_{j=0}^{\max} \pi_{k,j}^i \right) \cdot (\mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i) = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i
 \end{aligned} \tag{24}$$

### Referências Bibliográficas

- Bar-Shalom, Y., Li, X. R., and Kirubarajan, T. (2001). Estimation with Applications to Tracking and Navigation. John Wiley & Sons, INC., United States of America, 2001.
- Cattivelli, F. S., Lopes C. G., and Sayed A. H (2008). Diffusion strategies for distributed Kalman filtering: formulation and performance analysis. APR Workshop on Cognitive Information Processing, Santorini, Greece.
- Chagas, R. A. J., and Waldmann J. (2009). Difusão de medidas para estimação distribuída em uma rede de sensores. Anais do XI SIGE, Vol. V, pp. 71-75, São José dos Campos, Brazil.
- Larsen, T. D, Andersen, N. A., Ravn, O. and Poulsen, N. K. (1998). Incorporation of time delayed measurements in a discrete-time kalman filter. Proceedings of the 37th Conference on Decision & Control, pp. 3972-3977, Florida, United States of America.
- Olfati-Saber, R (2007). Distributed Kalman filtering for sensor networks. Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 5492-5498, New Orleans, Louisiana.
- Zhang, K., Li, X. R., and Zhu, Y. (2005). Optimal update with out-of-sequence measurements. IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 56, No. 6, pp. 1992-2004.